

Die Wahl der Hypothesenmatrix für Wald-Typ-Statistiken

Paavo Sattler¹ und Georg Zimmermann²

¹*Technische Universität Dortmund*

²*Paracelsus medizinische Universität & Paris Lodron Universität Salzburg*

Zusammenfassung

Im Kontext von linearen Modellen ebenso wie der (multivariaten) Kovarianzanalyse werden Nullhypothesen häufig mithilfe von Hypothesenmatrizen formuliert. Etwas konkreter betrachte ein Szenario mit d -dimensionalen Beobachtungsvektoren und Nullhypothesen der Form

$$\mathcal{H}_0 : \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\eta},$$

wobei $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times d}$ mit $m \leq d$ die Hypothesenmatrix ist, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$ der Parametervektor von Interesse und $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^m$ ein fester Vektor. So könnte beispielsweise $\boldsymbol{\theta}$ der Vektor der gruppenweisen Mittelwerte $\boldsymbol{\mu}$ (Friedrich et al. [2017]), ein Vektor von Regressionskoeffizienten $\boldsymbol{\beta}$ (Berndt and Savin [1977]) oder auch ein Vektor von Quantilen \mathbf{q} (Baumeister et al. [2024]) sein. Zu den etwas anspruchsvoller Parametervektoren gehören die nichtparametrischen relativen Effekte \mathbf{p} (Brunner and Puri [2001]) oder auch die passende Vektorisierung einer Kovarianzmatrix \mathbf{v} (Sattler et al. [2022]).

Allerdings wird bei der Formulierung all dieser Hypothesen häufig die Tatsache außer Acht gelassen, dass es für ein und dieselbe Hypothese, eine Vielzahl von Möglichkeiten gibt die Hypothesenmatrix \mathbf{H} sowie den zugehörigen Vektor $\boldsymbol{\eta}$ zu wählen. Für $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ ist es immerhin eine geläufige Tatsache das eine eindeutige Projektionsmatrix \mathbf{P} existiert für die $\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{P}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ gilt. Eine solche Projektionsmatrix muss allerdings für $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$ nicht zwangsläufig existieren. Außerdem enthalten diese Matrizen \mathbf{P} häufig Nullzeilen und sind auch in anderer Hinsicht numerisch wenig effizient, wenn zum Beispiel eine Teststatistik basierend auf einer quadratischen Form genutzt wird.

Aus diesem Grund betrachten werden zwei der geläufigsten quadratischen Formen, die Wald-Typ-Statistiken (WTS) und ANOVA-Typ-Statistiken (ATS), näher betrachtet, um den Einfluss der Hypothesenmatrizen festzustellen. Dabei zeigt sich, dass im Falle der WTS die konkrete Wahl der Hypothesenmatrix die Testentscheidung nicht beeinflusst. Im Gegensatz dazu hängt bei der ATS die Testentscheidung von der Hypothesenmatrix ab, was zwangsläufig die Frage aufwirft, wie die Matrix geeignet gewählt werden soll. Schließlich beeinflusst die Hypothesenmatrix nicht nur die Testentscheidung, sondern auch die benötigte Rechenleistung und damit die Laufzeit. Aus diesem Grund beleuchten wir auch, welche Operationen an einer Hypothesenmatrix durchgeführt werden können, ohne den Wert der ATS zu verändern, und wie sich das auf die Laufzeit auswirkt.

Literatur

Sarah Friedrich, Edgar Brunner, and Markus Pauly. Permuting longitudinal data in spite of the dependencies. *Journal of Multivariate Analysis*, 153:255–265, 2017.

Ernst R. Berndt and N. Eugene Savin. Conflict among criteria for testing hypotheses in the multivariate linear regression model. *Econometrica*, 45(5):1263–1277, 1977. ISSN 00129682, 14680262. URL <http://www.jstor.org/stable/1914072>.

Marléne Baumeister, Marc Ditzhaus, and Markus Pauly. Quantile-based manova: A new tool for inferring multivariate data in factorial designs. *Journal of Multivariate Analysis*, 199:105246, 2024. ISSN 0047-259X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2023.105246>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0047259X23000921>.

Edgar Brunner and Madan L Puri. Nonparametric methods in factorial designs. *Statistical papers*, 42:1–52, 2001.

Paavo Sattler, Arne C. Bathke, and Markus Pauly. Testing hypotheses about covariance matrices in general manova designs. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 219:134–146, 2022. ISSN 0378-3758. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jspi.2021.12.001>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378375821001269>.